



## **Zentrale Abiturprüfung 2012 Reservetermin**

### **Weiterer Leistungskurs**

### **Mathematik**

### **Fachbereich Technik**

## **Unterlagen für die Schülerinnen und Schüler**

## Aufgabenstellung

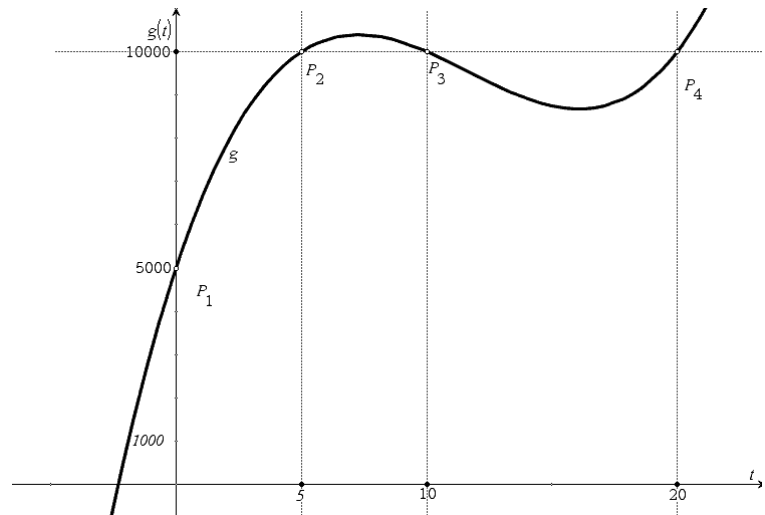
### Aufgabe 1

#### Beschreibung der Ausgangssituation

In einem Betrieb werden verschiedene Kugellager zunächst als Prototypen hergestellt. Bevor die Serienproduktion eines Kugellagers neuen Typs beginnt, werden ausführliche Belastungstests durchgeführt.

Ein wesentliches Kriterium ist die Drehzahl eines Kugellagers. Dies ist die momentane Umdrehungsgeschwindigkeit des Lagers und wird in der Einheit 1/s angegeben.

Ein erster Test mit einer Messdauer von 20 Sekunden beginnt mit einer Drehzahl von 5000 und durchläuft während der folgenden 20 Sekunden ein Testprogramm, bei dem nach 5, 10 und 20 Sekunden eine Drehzahl von 10 000 erreicht wird.



#### Aufgabenstellung

#### Punkte

- 1.1 Ermitteln Sie aus diesen Informationen eine ganzrationale Funktion  $g$  möglichst geringen Grades, die den Verlauf der Drehzahl mit den oben angegebenen Werten in Abhängigkeit der Zeit beschreibt. 8 P

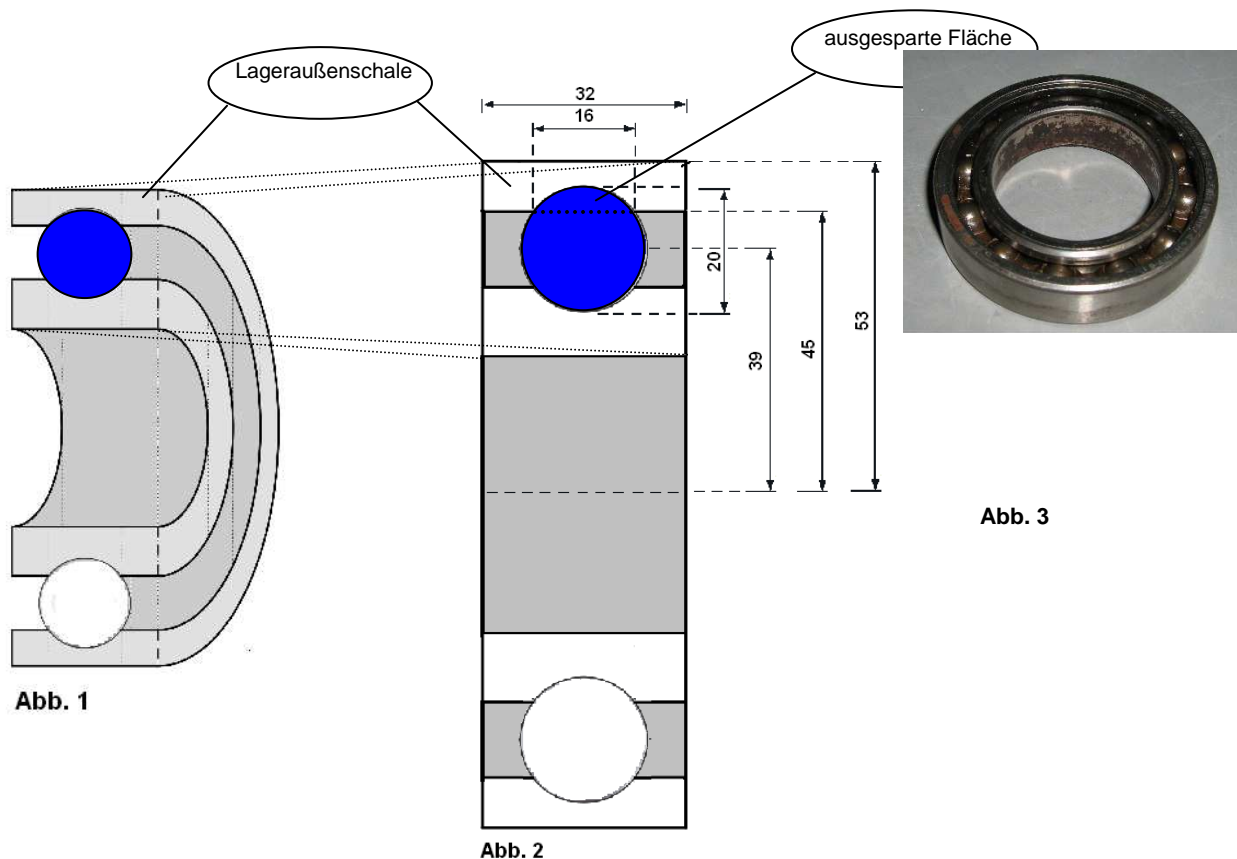
Verwenden Sie im Folgenden die Funktion  $g$  mit der Gleichung

$$g(t) = 5t^3 - 175t^2 + 1750t + 5000, \quad t \in \mathbb{R}$$

- 1.2 Bestimmen Sie die höchste Umdrehungsgeschwindigkeit des Lagers im Rahmen des Testprogramms. 6 P
- 1.3 Berechnen Sie die Zeitpunkte des Testprogramms, an denen die Drehzahl am stärksten zu- bzw. abnimmt. 6 P
- 1.4 Bestimmen Sie die Gesamtzahl der Umdrehungen im Verlauf des Messprogramms. 6 P

Zu den angefertigten Prototypen gehört ein neues Radiallager, dessen Kugeln mittig zwischen einer inneren und einer äußeren Lagerschale geführt werden. Die Führung erfolgt durch kreisbogenförmige Aussparungen in den Lagerschalen. Das Prinzip ist in der Abb. 1 skizziert.

Als Grundlage für die Kalkulation der Firma (Materialbestellung und Preis) wird das Volumen der Lageraußenschale benötigt. In der Abbildung 2 ist das frontale Schnittbild des Kugellagers mit den Maßen in mm angegeben.



- 1.5 Die Gleichung für einen Halbkreis mit Radius  $r$  lautet  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ . Zeigen Sie damit, dass die ausgesparte Querschnittsfläche (siehe Abb. 2)  $44,73 \text{ mm}^2$  beträgt. 6 P
- 1.6 Leiten Sie durch eine Zerlegung der rotierenden Fläche in geeignete Teilflächen eine Formel zur Berechnung des Volumens der Lageraußenschale her und weisen Sie nach, dass dieses Volumen etwa  $65\,700 \text{ mm}^3$  beträgt. 13 P
- Hinweis: Volumen eines Rotationskörpers  $V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$

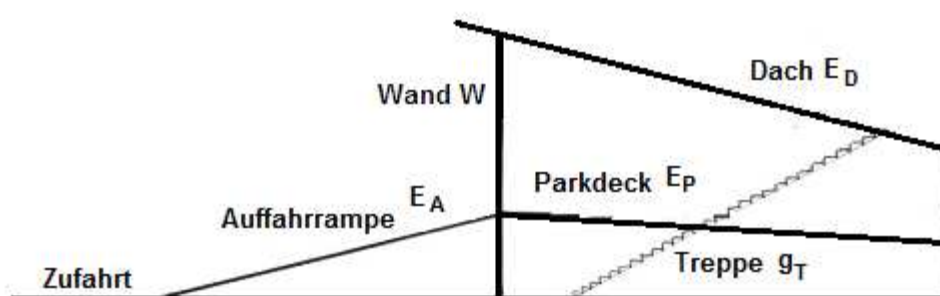
**Gesamtpunkte Aufgabe 1 45 P**

## Aufgabe 2

### Beschreibung der Ausgangssituation

Nachfolgend ist die Seitenansicht eines geplanten Parkhauses dargestellt.

Die Zufahrt befindet sich in der  $x_1 - x_2$  - Ebene. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt in der Schnittgeraden der Auffahrtrampe mit der Zufahrtsebene. Die nachfolgende Skizze zeigt eine Schnittdarstellung des Parkhauses in der  $x_2 - x_3$  - Ebene. Alle Maße im Aufgabentext sind in Meter angegeben.



### Aufgabenstellung

### Punkte

- 2.1 Das Parkdeck lässt sich durch eine leicht geneigte Ebene  $E_P$  beschreiben. 5 P  
Die Punkte  $P_1 (4 \mid 15 \mid 5)$ ,  $P_2 (35 \mid 35 \mid 4)$  und  $P_3 (46 \mid 25 \mid 4,5)$  liegen in dieser Ebene  $E_P$ .  
Bestimmen Sie die zugehörige Ebenengleichung in Parameterform und Koordinatenform.
- Kontrollergesult:  $E_P : x_2 + 20x_3 = 115$
- 2.2 Die linke Begrenzungswand  $W$  des Parkhauses ist senkrecht über den Punkten  $W_1 (37,5 \mid 15 \mid 0)$  und  $W_2 (29 \mid 15 \mid 0)$  errichtet. Bestimmen Sie die Schnittgerade  $g_S$  zwischen der Wand  $W$  und der Ebene  $E_P$ . 5 P

Kontrollergesult:  $g_S : \vec{x} = \begin{pmatrix} 46 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, l \in \mathbb{R}$



Die Auffahrt zum Parkhaus erfolgt über eine Auffahrrampe. Tests haben ergeben, dass einige Autos bei einem Steigungswinkel  $\alpha$  größer  $20^\circ$  mit der Stoßstange beim Auffahren auf die Rampe aufsetzen können. Die bisherige Auffahrebene  $E_A$  genügte dieser Anforderung nicht. Alternative Auffahrampen zum Parkdeck  $E_P$  können durch die Ebenen:

$$E_{Ak} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 29 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R} \text{ beschrieben werden. Hier wurde für den}$$

Stützvektor ein Punkt in der Wand  $W$  gewählt.

- 2.3 Leiten Sie für die Ebenengleichung  $E_{AK}$  den Wert für  $k$  her, so dass der Steigungswinkel genau den Grenzwinkel  $\alpha = 20^\circ$  beträgt und die Ebene als Auffahrt geeignet ist. 12 P  
Zeigen Sie, dass der Übergang zwischen dieser Auffahrrampe und der Parkebene durch die Gerade  $g_s$  beschrieben wird.

- 2.4 Damit Fußgänger gefahrlos das Parkdeck erreichen können, soll eine Treppe von Punkt  $T_1 (48 | 18 | 0)$  zum Punkt  $T_2 (48 | 25 | 4,5)$  verlaufen. 11 P  
Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden  $g_T$  der Lauflinie der Treppenmitte und berechnen Sie den Winkel der Treppe zum Parkdeck  $E_P$ .

Kontrollergesult:  $g_T : \vec{x} = \begin{pmatrix} 48 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 4,5 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$

Die Treppe soll für Wartungszwecke weiter zum Parkhausdach führen. Das Parkhausdach lässt sich durch die Ebene  $E_D : x_2 + 10x_3 = 105$  beschreiben.

- 2.5 Ermitteln Sie die Stelle, an der die Lauflinie der Treppenmitte auf die Dachebene trifft. 12 P  
Die Treppe soll eine Breite von 1 m haben und von einer zwei Meter großen Person begangen werden können. Dazu ist eine rechteckige Öffnung in der Dachebene vorzusehen.  
Leiten Sie die Koordinaten der Eckpunkte dieses Vierecks her.

**Gesamtpunkte Aufgabe 2 45 P**



### Aufgabe 3

#### Beschreibung der Ausgangssituation – Der manipulierte Würfel

Ein Würfelspieler hat zwei Würfel zur Verfügung: Einen Würfel vom Typ A, dieser soll als ideal angesehen werden, und einen manipulierten Würfel vom Typ B. Dieser wurde durch Einbau eines symmetrischen Gewichts auf der „1er“-Seite so verändert, dass er doppelt so häufig eine „6“ wie eine „1“ zeigt. Die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse „Augenzahl 2“ bis „Augenzahl 5“ betragen weiterhin jeweils  $\frac{1}{6}$ .

Im Folgenden bezeichne  $P_A(i)$  bzw.  $P_B(i)$  für  $i = 1 ; .. ; 6$  die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse:

„Mit dem Würfel vom Typ A bzw. vom Typ B wurde bei einmaligem Wurf die Zahl  $i$  gewürfelt.“

#### Aufgabenstellung

#### Punkte

- 3.1 Bestimmen Sie zunächst die Wahrscheinlichkeiten  $P_B(1)$  und  $P_B(6)$  und geben Sie dann die beiden Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Ergebnisse des Würfels mit einem Würfel Typ A und Typ B an. 8 P

Die Kontrollergebnisse  $P_B(1) = \frac{1}{9}$  und  $P_B(6) = \frac{2}{9}$  sind im Folgenden zu verwenden.

- 3.2 Es wird gleichzeitig mit je einem Würfel vom Typ A und vom Typ B gewürfelt. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für das Erzielen eines Paschs (zwei gleiche Augenzahlen). 6 P
- 3.3 Zwei Spieler vereinbaren ein Würfelspiel wie folgt: Spieler A wirft einen Würfel vom Typ A, sein Ergebnis sei  $a$ , Spieler B einen Würfel vom Typ B mit Ergebnis  $b$ . Spieler A gewinnt bei  $a \geq b$ , Spieler B gewinnt bei  $a < b$ . Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn von A und die für einen Gewinn von B und entscheiden Sie, ob es sich um ein faires Spiel handelt. 6 P



- 3.4 Zur Untersuchung der Wahrscheinlichkeiten für das Würfeln einer „6“ mit einem B-Würfel wird eine Serie von 60 Würfeln gestartet. Die Zufallsgröße  $X$  bezeichne die Anzahl der erzielten „6er“. Erläutern Sie, welche Verteilung der Zufallsgröße  $X$  zugrunde liegt, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die beiden Ereignisse:  
 $E_1$  : Es werden mindestens 10 und höchstens 15 „6er“ geworfen.  
 $E_2$  : Es wird höchstens 46 Mal keine „6“ geworfen. 7 P

In einer weiteren Untersuchung soll zufällig (gleich wahrscheinlich) einer der beiden Würfel A oder B ausgewählt und dieser dann 250 Mal geworfen werden.

Betrachtet werde die Zufallsgröße  $X$ : Anzahl der „6er“ unter den 250 Würfeln und die bedingten Wahrscheinlichkeiten:

- $P_A(X \leq 47)$  Wurfresultat höchstens 47 „6er“ unter der Bedingung „es ist ein Würfel Typ A“ und  
 $P_B(X > 47)$  Wurfresultat mehr als 47 „6er“ unter der Bedingung „es ist ein Würfel Typ B“

- 3.5 Zeigen Sie, dass für die bedingten Wahrscheinlichkeiten gilt: 9 P  
 $P_A(X \leq 47) \approx 0,8391$  und  $P_B(X > 47) \approx 0,8913$  und stellen Sie die Ereignisse „Typ des Würfels: A“ bzw. „Typ des Würfels: B“ und „Anzahl 6er: höchstens 47 bzw. „Anzahl 6er größer 47“ in einem vollständigen zweistufigen Baumdiagramm dar.

- 3.6 Aufgrund vieler Testreihen von jeweils 250 Würfeln entscheidet sich der Beobachter wie folgt: 9 P  
Bei höchstens 47 „6er“ wird er eher auf das Vorliegen eines Würfels des Typs A tippen, bei mindestens 48 „6er“ wird er eher auf das Vorliegen eines Würfels des Typs B tippen.  
Beurteilen Sie die Entscheidungen des Beobachters unter Betrachtung geeigneter bedingter Wahrscheinlichkeiten und leiten Sie die beiden Wahrscheinlichkeiten dafür her, dass der Beobachter falsche Schlussfolgerungen getroffen hat.

**Gesamtpunkte Aufgabe 3 45 P**



## Materialgrundlage (Quellenangaben, Fundstellen)

Aufgabe 1:

eigene Anfertigung der Kommission

Aufgabe 2:

Zeichnung: eigene Anfertigung

## Zugelassene Hilfsmittel

Für den Aufgabensatz 2 (mit CAS) sind in der Abiturprüfung 2012 zugelassen:

- Gedruckte Formelsammlungen der Schulbuchverlage, die keine Beispielaufgaben enthalten (Die Formelsammlungen sind vor Ausgabe an die Schülerinnen und Schüler zu überprüfen.)
- Wissenschaftliche Taschenrechner
- Computeralgebrasysteme und/oder Tabellenkalkulation.

Für den Aufgabensatz 2 (mit CAS) sind in der Abiturprüfung 2012 **nicht** zugelassen:

- Schulinterne eigene Druckwerke, mathematische Fachbücher und mathematische Lexika

## Punktevergabe und Arbeitszeit

Inhaltliche Leistung (Verstehensleistung)	135 Punkte
Darstellungsleistung	15 Punkte
Gesamtpunktzahl	150 Punkte

Bearbeitungszeit	255 Minuten
------------------	-------------